Cuadernos de Economía Vol. 13. 251-265. 1.985.

Modelo de control óptimo del saldo de tesorería.

Albert Biayna

Departamento de Seguro y Matemáticas.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, s/n – 08034 Barcelona

En el presente artículo se emplean métodos matemáticos de optimización dinámica en tiempo continuo y se realiza una aplicación determinista de la teoría del control óptimo y el enfoque del principio del máximo al control óptimo del saldo de tesorería para cubrir la demanda de dinero a un mínimo coste descontado. El modelo se formula con dos variables de estado (saldo de tesorería y saldo de valores mobiliarios) y una variable de control (la venta o compra de valores mobiliarios). Con la solución del problema se llega a la conclusión de que la política óptima a seguir es vender (comprar) si el valor final de una unidad monetaria menos (más) la comisión es mayor (menor) que el valor final del equivalente a una unidad monetaria de valores mobiliarios, y no vender (no comprar) si los valores finales están en orden contrario. Finalmente se extiende el modelo desautorizando la posibilidad de operar en descubierto de tesorería y de operar en descubierto de valores mobiliarios, en el sentido de vender títulos que no se tienen y se esperan comprar a bajo precio antes de entregarlos.

The present article uses mathematical methods of dynamic optimization in continuous time and deals with a deterministic application of the control theory amd the maximum principe on the cash balance optimal control. It consists of checking the cash balance avalaiable to meet the demand of money at a minimum discounted cost. The model is expressed with two state variables (the sale or purchase of securities). With the solution to the problem we reach the conclusion that the optimal policy to be followed is to sell (purchase) if the future value of a monetary unit minus (plus) the broker's comission is bigger (smaller) than the future value of a monetary unit worth of securities, and not to sell (not to purchase) if the future values are in reverse order. The model is finally extended disallowing the possibility of cash overdraft as well as security overdraft, meaning the sale of unpossessed stock in the hope of buying it at a lower price before delivery.

1. INTRODUCCION

1.1. *Del cálculo de variaciones clásico a la teoría del control óptimo.*

El *cálculo de variaciones* fue el primer instrumento metodológico usado en la solución de problemas de optimización en economía dinámica. Es en la década que se inicia con el año 1920 que tales métodos son aplicados a problemas económicos. No obstante estos métodos eran incapaces para tratar con problemas que incluyesen restricciones sobre las variables de control.

En 1956, Pontryaguin y sus colaboradores aportan el "principio del máximo" para resolver problemas con restricciones sobre las variables de control. El "principio del máximo" es en esencia una generalización del cálculo de variaciones clásico. La formalización del "principio del máximo" establece las bases de la *teoría del control óptimo.*

Desde entonces, se han desarrollado extensiones hacia ambos métodos, como la reinterpretación del "principio del máximo" en el cálculo de variaciones, que han conducido a la madurez los instrumentos cuantitativos de análisis de los modelos dinámicos.

El clásico cálculo de variaciones introducido inicialmente, no pudo tratar los problemas de optimización dinámica en los que las variables de control y las variables de estado estaban deslindadas. En la década que se inicia con el año 1960, Berkovitz y Hestenes muestran como problemas de optimización dinámica con variables delindadas pueden ser tratados por el cálculo de variaciones.

Es común, no obstante, el uso del lenguaje de la teoría del control más que el del cálculo de variaciones en el tratamiento de restricciones sobre las variables de control. El cálculo de variaciones y la teoría del control son, fundamentalmente, el mismo método. Difieren en el formalismo que usan para expresar las condiciones en la evolución óptima de un sistema.

1.2. *Métodos de optimización basados en el "principio del máximo" de Pontryaguin: El problema del control y el "principio del máximo".*

El problema del control consiste en determinar las decisiones que optimizan un objetivo, sujeto a comportamiento dinámico.

Los elementos esenciales de los problemas de control son el funcional objetivo, las variables de control y las variables de estado.

- Dado un sistema dinámico, esto es el comportamiento dinámico de un sistema expresado por una o un conjunto de ecuaciones diferenciales (o en diferencias en el supuesto de campo discreto) simultáneas que relacionan las variables de estado y las variables de control.
- Dado un funcional objetivo.
- Dado un conjunto de restricciones sobre las variables de estado y las variables de control.

Se trata de seleccionar aquellas variables de control que optimicen el funcional objetivo sujeto al comportamiento dinámico del sistema y a las restricciones de estado y de control.

Para resolver el problema de control óptimo cuando el control está restringido, empleamos el enfoque del *"principio del máximo"*:

Definimos la función Hamiltoniana, lo que supone la aparición de las variables de coestado. La forma de solución se sigue a menudo fácilmente de la optimización de la Hamiltoniana, que por lo común da las variables de control óptimo no como funciones del tiempo sino como funciones de las variables de coestado. Para poder, pues, obtener las variables de control como funciones del tiempo, se requieren entonces los cursos temporales de las variables de coestado, lo que comporta resolver un problema de valores de contorno con ecuaciones diferenciales las cuales, unas tienen condiciones de contorno iniciales (las de las variables de estado) y otras tienen condiciones de contorno terminales (las de las variables de coestado).

El "principio del máximo" puede considerarse como una generalización dinámica del método de los multiplicadores de Lagrange. Las variables de coestado dan información sobre la sensibilidad de la solución a variaciones de los parámetros.

2. FORMALIZACION DEL PROBLEMA DE CONTROL Y DEL ENFOQUE DEL "PRINCIPIO DEL MAXIMO"

2.1. *Planteamiento formal del problema del control óptimo.*

Planteamos el problema de control con n variables de estado x_i $i = 1, 2 \ldots n$ y r variables de control u_j $j = 1, 2 \ldots r$.

Sea el *vector de estado* de dimensión n formado por n variables de estado

$$X(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{Bmatrix}$$

Cada variable de estado se supone función contínua del tiempo, de modo que la trayectoria de estado

$$\left\{X(t)\right\} = \left\{X(t) \in R^n / t_o \leqslant t \leqslant t_f\right\}$$

es una función contínua de valores vectoriales del tiempo.

La trayectoria de estado comienza en el estado inicial

$$X(t_o) = X_o$$

que se supone dado, y finaliza en el estado terminal

$$X(t_f) = X_f \quad \text{o bien}$$
$$[X(t), t] \in T \quad \text{en } t = t_f$$

siendo T alguna superficie terminal dada.

Sea el *vector de control* de dimensión r formado por r variables de control

$$U(t) = \left\{ \begin{array}{l} u_1 \ (t) \\ u_2 \ (t) \\ . \\ . \\ u_r \ (t) \end{array} \right\}$$

Cada variable de control es una función del tiempo continua a trozos, de modo que la trayectoria de control

$$\left\{ U\ (t) \right\} = \left\{ U(t) \epsilon\ R^r / t_o \leqslant t \leqslant t_f \right\}$$

es una función contínua a trozos de valores vectoriales del tiempo.

La trayectoria de control debe pertenecer al conjunto de control *U* dado

$$\left\{ U(t) \right\} \ \epsilon\ \mathcal{U}$$
$$\mathcal{U} = \left\{ U(t) \quad /U(t)\!: \ [t_o, t_f] \rightarrow \Omega \right\}$$

lo que exige que U(t) sea una función contínua a intervalos de tiempo, cuyos valores deben pertenecer al conjunto Ω, un subconjunto dado del espacio euclídeo R^r, no vacío y compacto (es decir cerrado y acotado).

$$U(t) \ \epsilon\ \Omega \ CR^r$$

El conjunto Ω representa las restricciones sobre los valores de las variables de control en el tiempo t.

Las *ecuaciones de estado* caracterizan la trayectoria de estado $\left\{ X\ (t) \right\}$ y también se llaman ecuaciones de movimiento pues describen la evolución del sistema, son un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden que expresan la tasa instantánea de variación de cada variable de estado en función de las variables de estado, de las variables de control y del tiempo:

$$\dot{X}(t) = \vec{f}(X, U, t)$$

$\vec{f}$ es una función vectorial dada contínuamente diferenciable.

El *funcional objetivo* es de la forma:

$$J = \int_{t_o}^{t_f} I(X, U, t)\, dt + F(X_f, t_f)$$

$I(X, U, t)$ es la función intermedia,
$F(X_f, t_f)$ es la función final,
I y F son funciones dadas contínuamente diferenciables.

El *problema del control óptimo* consiste en:

Maximizar el funcional:

$$\max_{U(t)} \quad J = \int_{t_o}^{t_f} I(X, U, t)\, dt + F(X_f, t_f)$$

Sujeto a	$\vec{f}(X, U, t) - \dot{X}(t) = 0$	$t_o \leqslant t \leqslant t_f$
donde	$t_o,\ X_o = X(t_o)$	
	$t_f,\ X_f = X(t_f)$	
y	$U(t) \in \Omega$	

2.2. *El enfoque del "principio del máximo".*

Introducimos un vector fila no nulo de n nuevas variables, una para cada una de las n restricciones.

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$$

A las componentes $y_i(t)$ las llamaremos *variables de coestado* o variables auxiliares, y son los equivalentes dinámicos de los multiplicadores de Lagrange de la programación estática.

Definimos la *función Hamiltoniana* H

$$H(X, U, Y, t) = I(X, U, t) + Y \cdot \vec{f}(X, U, t)$$

que es la suma de la función intermedia (integrando) del funcional objetivo más el producto interno del vector de las variables de coestado y la función vectorial que define las tasas de variación de las variables de estado.

Para que exista un máximo es necesario que se cumpla:

$$\max_{U(t)} H(X, U, Y, t) \qquad \text{para todo } t/\ t_o \leqslant t \leqslant t_f$$

$$\dot{X} = \nabla_Y H \qquad\qquad X(t_o) = X_o$$

$$\dot{Y} = -\nabla_x H \qquad\qquad Y(t_f) = \nabla_{x_f} F$$

Estas ecuaciones diferenciales para las variables de estado, y las ecuaciones diferenciales para las variables de coestado, mas todas las condiciones de contorno se denominan *ecuaciones canónicas* (2n ecuaciones).

Las n primeras ecuaciones

$$\dot{X} = \nabla_Y H$$

expresadas en forma desarrollada:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = f_i \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, n$$

son simplemente las restricciones $\dot{X} = \vec{f}$.

Si H se maximiza en un punto interior, entonces tenemos que $\nabla_U H = 0$.

2.3. *El principio del máximo con restricciones*

Hasta aquí nos hemos referido al problema de control sin restricciones sobre las variables de estado X, a excepción de la propia ecuación de estado:

$$\dot{X}(t) = \vec{f}(X, U, t) \qquad\qquad X(t_o) = X_o$$

Ahora, además, definimos un control U(t) como admisible si satisface:

$$\vec{g}(X, U, t) \geqslant 0$$

donde $\vec{g}$ es una función vectorial diferenciable en X y en U.

Aceptándose que las condiciones de la forma $U(t) \in \Omega$ vistas anteriormente pueden ser expresadas por inecuaciones de la forma de las restricciones

$$\vec{g}(X, U, t) \geqslant 0.$$

Para aplicar el principio del máximo definimos la función Hamiltoniana H como:

$$H(X, U, Y, t) = I(X, U, t) + Y \cdot \vec{f}(X, U, t)$$

donde $Y \in R^n$ es el vector fila de las variables de coestado. Y definimos la función Lagrangeana L como:

$$L(X, U, Y, \mu, t) = H(X, U, Y, t) + \mu \cdot \vec{g}(X, U, t)$$

O simplemente: $L = H + \mu \cdot \vec{g}$

donde $\mu \in R^q$ es un vector fila cuyas componentes se denominan multiplicadores de Lagrange.

Debiéndose cumplir ciertas condiciones necesarias de control óptimo:

El vector de las variables de coestado satisface las ecuaciones diferenciales

$$\dot{Y} = -\nabla_x L(X, U, Y, \mu, t)$$

con las correspondientes condiciones finales de contorno

$$Y(t_f) \geqslant \nabla_{x_f} F$$

Los multiplicadores de Lagrange, componentes del vector μ, son tales que

$$\nabla_U L = 0$$

Y se dan las condiciones complementarias débiles

$$\mu \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad \mu \cdot \vec{g}(X, U, t) = 0$$

2.4. *Restricciones de no negatividad de las variables de estado*

En muchos problemas económicos y empresariales, es frecuente encontrarse con las condiciones de no negatividad de las variables de estado, de la forma:

$$X(t) \geqslant 0 \qquad \text{para} \qquad t/t_o \leqslant t \leqslant t_f \qquad (*)$$

donde no aparecen directamente las variables de control. Para tratar estas restricciones procederemos como sigue: En un punto donde $x_i(t) > 0$, la correspondiente restricción (*) ya no es una ligadura y puede ser ignorada.

En un intervalo donde $x_i(t) = 0$, debe ser $\dot{x}_i(t) \geqslant 0$ de manera que x_i no puede devenir negativa, por consiguiente se debe cumplir que $\dot{x}_i = f_i \geqslant 0$; haciendo $f_i \geqslant 0$ tenemos como restricción, una del tipo $g_i(X, U, t) \geqslant 0$.

Podemos añadir al planteamiento del problema la restricción:

$$f_i(X, U, t) \geqslant 0 \qquad \text{siempre que} \qquad x_i(t) = 0$$

Simbolicemos por η_i los multiplicadores de Lagrange asociados a esta restricción.

Es conveniente imponer la condición $\eta_i \cdot x_i = 0$, así será $\eta_i = 0$ siempre que $x_i > 0$.

Definimos la función Lagrangeana L como:

$$L = H + \mu \cdot \vec{g} + \eta \cdot \vec{f}$$

donde $\eta \in R^n$ es un vector fila de multiplicadores de Lagrange. Y aplicamos el principio del máximo con las condiciones adicionales:

$$\eta \geqslant 0, \qquad \eta \cdot X = 0, \qquad \eta \cdot \vec{f} = 0$$

3. Aplicacion al problema del saldo de tesoreria, o control optimo del nivel del saldo de activo disponible

3.1. *Enunciado del problema.*

Una empresa posee dos tipos de activos: un activo disponible o tesorería, por ejemplo una cuenta corriente; y un activo inmaterial financiero como valores mobiliarios, por ejemplo, bonos, obligaciones y acciones. La cuenta corriente es usada para cubrir día a día las transacciones requeridas. Durante un arbitrario plazo de tiempo, el nivel de su saldo es sujeto a fluctuaciones que dependen de que los ingresos sean menores o mayores que los gastos durante este plazo. Los saldos negativos de la cuenta corriente son permitidos teniendo que soportar un pesado coste a un tipo de interés como el de operaciones de préstamo a corto plazo, mientras que los saldos positivos posiblemente sólo proporcionan a la empresa un bajo rendimiento. En cualquier momento la empresa puede ordenar dos tipos de transferencias de dinero: una transferencia positiva desde valores mobiliarios a tesorería por venta de títulos, y una transferencia negativa desde tesorería a valores mobiliarios por inversión en títulos. El bajo rendimiento obtenido por los saldos positivos de tesorería y el elevado coste con que se penalizan sus saldos negativos, comparados con el rendimiento obtenido invirtiendo en valores mobiliarios son incentivos para evitar que los saldos de tesorería sean exageradamente altos o bajos y eventualmente ordenar una transferencia negativa o positiva. La empresa se propone maximizar el beneficio, y el problema es buscar una política operativa que minimice la suma esperada de los futuros costes descontados.

Se trata de controlar el nivel de saldo de activo disponible o tesorería de una empresa para cubrir su demanda de dinero o necesidad tesorera a un mínimo coste total descontado.

3.2. *Planteamiento y formulación del problema de control óptimo del saldo de tesorería*

Establecemos el modelo:

Variables de estado:

x_1 (t) = el saldo de activo disponible en unidades monetarias al tiempo t.

x_2 (t) = el saldo de valores mobiliarios en unidades monetarias al tiempo t.

Variable de control:

$u(t) =$ venta de valores mobiliarios en unidades monetarias, significando que una venta negativa es una compra, está acotada $-M \leqslant u(t) \leqslant M,\ M \geqslant 0$.

Datos:

$d =$ tasa instantánea de demanda de dinero o necesidad tesorera, pudiendo ser positiva y negativa.

$r_1\ (t) =$ tanto de interés ganado sobre el saldo de tesorería.

$r_2\ (t) =$ tanto de interés ganado sobre el saldo de valores mobiliarios.

$\alpha =$ comisión en u. m. por valor en u. m. de valores mobiliarios comprados o vendidos.

Las *ecuaciones de estado*:

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 - d + u - \alpha\ |u| \qquad x_1(0) = x_1^o \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 - u \qquad x_2(0) = x_2^o \qquad (2)$$

expresan respectivamente:

La derivada respecto al tiempo del saldo de tesorería es igual al producto del tanto de interés ganado sobre el saldo de tesorería multiplicado por dicho saldo, menos la tasa instantánea de demanda de dinero, más la venta de valores mobiliarios, menos el producto de la comisión sobre compra o venta de valores mobiliarios multiplicado por el valor absoluto de dicha compra o venta.

La derivada respecto al tiempo del saldo de valores mobiliarios es igual al producto del tanto de interés ganado sobre el saldo de valores mobiliarios multiplicado por dicho saldo, menos la venta de valores mobiliarios.

El *funcional objetivo* presenta la circunstancia de que la función intermedia es idénticamente nula, en consecuencia se trata de un problema de Mayer. Además, aquí, la función final es lineal. Así pues, en vez de un funcional, tenemos como objetivo una combinación lineal de las variables de estado.

En efecto, el objetivo del modelo es la máxima suma de los saldos de tesorería y valores mobiliarios al final del plazo:

$$\text{Max}\ [x_1(t_f) + x_2\ (t_f)]$$

sujeto a (1) (2)

3.3. *Uso del "principio del máximo" aplicado a la resolución del problema del control óptimo del saldo de tesorería.*

Introducimos las dos variables de coestado y_1, y_2. Definimos la función Hamiltoniana:

$$H(x_1, x_2, u, y_1, y_2, t) = y_1 (r_1 x_1 - d + u - \alpha |u|) + y_2 (r_2 x_2 - u)$$

Las dos ecuaciones diferenciales de las variables de coestado, junto con sus condiciones de contorno son:

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -y_1 r_1 \qquad y_1(t_f) = 1$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -y_2 r_2 \qquad y_2(t_f) = 1$$

Resueltas dan:

$$y_1(t) = e^{\int_t^{t_f} r_1(s)\, ds}$$

$$y_2(t) = e^{\int_t^{t_f} r_2(s)\, ds}$$

Las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales admiten como interpretación, que las variables de coestado son el valor final de una unidad monetaria en la cuenta de tesorería y en la cuenta de valores mobiliarios, respectivamente, desde el tiempo t al t_f.

Para buscar la política óptima, hemos de seleccionar la variable de control u que maximice la función Hamiltoniana H.

Como usamos la función valor absoluto $|u|$ de la variable de control u, que cuando:

$u < 0$ representa compras de valores mobiliarios.

$u > 0$ representa ventas de valores mobiliarios,

para tratar $|u|$, de una forma más manejable podemos escribir la variable de control u como la diferencia de dos variables no negativas

$$u = u_1 - u_2 \qquad u_1 \geqslant 0 \qquad u_2 \geqslant 0 \tag{3}$$

y requerimos que:

$u = u_1$ cuando u es positivo.

$u = u_2$ cuando u es negativo.

Y por esto imponemos la siguiente condición cuadrática:

$$u_1 \,.\, u_2 = 0 \tag{4}$$

de tal manera que a lo sumo uno de u_1 y u_2 puede ser no nulo.

Observemos que en el caso que nos ocupa la condición (4) es automáticamente satisfecha, la razón es que en nuestro problema nunca compraremos y venderemos simultáneamente los mismos valores mobiliarios.

De (3) y (4) se sigue que

$$|u| = u_1 + u_2 \tag{5}$$

Si insertamos (3) y (5) en la función Hamiltoniana H, obtenemos que:

$$H = y_1(r_1 x_1 - d + u - \alpha\, |u|) + y_2(r_2 x_2 - u) =$$

$$= u_1\,[y_1(1-\alpha) - y_2] - u_2\,[y_1(1+\alpha) - y_2] + y_1 r_1 x_1 - y_1 d + y_2 r_2 x_2$$

Hay que maximizar H respecto a u_1 y u_2, pero observemos que H es lineal en u_1 y u_2, por lo tanto la solución óptima es un control "bang–bang", es decir que el control óptimo se desplaza de un extremo a otro de la región factible, y podemos escribir:

$$u_1 = \begin{cases} M & \text{si } (1-\alpha)\, y_1 > y_2 \\ 0 & \text{si } (1-\alpha)\, y_1 < y_2 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } (1+\alpha)\, y_1 > y_2 \\ M & \text{si } (1+\alpha)\, y_1 < y_2 \end{cases}$$

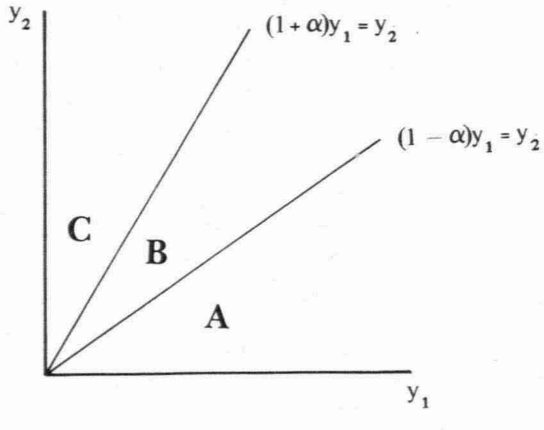
es decir:

$$u = \begin{cases} M & \text{si } (1-\alpha)\ y_1 > y_2 \\ 0 & \text{si } (1-\alpha)\ y_1 < y_2 < (1+\alpha) y_2 \\ -M & \text{si } (1+\alpha)\ y_1 < y_2 \end{cases}$$

La política óptima es en consecuencia:

- vender al máximo tanto si el valor final de una u.m. menos la comisión es mayor que el valor final del equivalente a una u.m. de valores mobiliarios, y no vender si los valores futuros están en orden contrario.
- comprar valores mobiliarios al máximo tanto si el valor final de una u.m. más la comisión es menor que el valor final del equivalente a una u.m. de valores mobiliarios, y no comprar si los valores futuros están en orden contrario.
- el control es indeterminado si se cumple la igualdad y entonces la empresa es indiferente.

Gráficamente:



Area A = vender valores mobiliarios.
Area B = guardar la cartera de valores mobiliarios.
Area C = comprar valores mobiliarios.

3.4. *Extensión del problema rechazando las situaciones de descubierto.*

Podemos plantear el problema del control óptimo del saldo de tesorería rechazando o descartando la posibilidad de operar en descubierto de tesorería y de operar en descubierto de valores (en el sentido de vender títulos que no se tienen y se esperan comprar a bajo precio antes de entregarlos).

Para ello, matemáticamente, imponemos las restricciones adicionales:

$$x_1(t) \geqslant 0 \qquad y \qquad x_2(t) \geqslant 0$$

Lo cual requiere definir la función Lagrangeana L

$$L = H + \eta_1 \dot{x}_1 + \eta_2 \dot{x}_2$$

$$L = y_1(r_1 x_1 - d + u - \alpha\, |u|) + y_2(r_2 x_2 - u) +$$

$$+ \eta_1(r_1 x_1 - d + u - \alpha\, |u|) + \eta_2(r_2 x_2 - u)$$

donde:

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(y_1 + \eta_1)r_1 \qquad , \; y_1(t_f) = 1$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -(y_2 + \eta_2)r_2 \qquad , \; y_2(t_f) = 1$$

y los multiplicadores de Lagrange η_1 y η_2 deben satisfacer la condiciones complementarias débiles:

$$\eta_1(t) \geqslant 0, \; \eta_1(t) \,.\, x_1(t) = 0, \; \eta_1 \,.\, (r_1 . x_1 - d + u - \alpha\, |u|) = 0$$

$$\eta_2(t) \geqslant 0, \; \eta_2(t) \,.\, x_2(t) = 0, \; \eta_2 \,.\, (r_2 . x_2 - u) = 0$$

$$y \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

para todo $t / t_o \leqslant t \leqslant t_f$

En general, la solución de esta extensión del problema tiene cierta dificultad y requiere el uso de un ordenador.

4. BIBLIOGRAFIA

BENSOUSSAN, A. – GERALD HURST, E. Jr. – NASLUND, B.: Management applications of modern control theory. North–Holland, Amsterdam 1974.

SETHI, S.: "A Survey of Management Science Applications of Deterministic Maximum Principle". Applied Optimal Control. Studies in the Management Sciences. Vol. 9, 1978. North–Holland, Amsterdam 1978.

SETHI, S. – THOMPSON, G.: Optimal Control Theory. Applications to Management Science. Ed. Montinus Nijhoff publishing, La Haya 1981.

TAPIERO, Ch. S.
"Time, Dynamics and Process of Management Modeling". Applied Optimal Control. Studies in the Management Sciences. Vol. 9, 1978. North–Holland, Amsterdam 1978.

VIAL, J. Ph.: "A continous time model for the cash balance problem". Mathematical methods in investment and finance. Szegö and Shell Ed. North–Holland, Amsterdam 1972.